МИНОБРНАУКИ РОССИИ
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**
**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**(ФГБОУ ВО «ВГУ»)**

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой
*функционального анализа*
*и операторных уравнений*

*Каменский М.И.*
*подпись, расшифровка подписи*
20.03.2025г.

# РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.18 Функциональный анализ

**1. Код и наименование направления подготовки:** 02.03.01 математика и компьютерные науки

**2. Профиль подготовки:** Математическое и компьютерное моделирование

**3. Квалификация выпускника:** бакалавр

**4. Форма обучения:** очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** функционального анализа и операторных уравнений

**6. Составители программы:** Каменский Михаил Игоревич, д.ф.-м.н., профессор; Петрова Анастасия Александровна, старший преподаватель, к.ф.-м.н.; Бондарев Андрей Сергеевич, доцент, к.ф.-м.н.

**7. Рекомендована:** НМС математического факультета, 18.03.2025 Протокол №0500-038.

**8. Учебный год:** 2026-2027, 2027-2028 Семестр(ы): 4, 5, 6

**9.Цели и задачи учебной дисциплины:**

*Целями освоения учебной дисциплины являются:*

- доведение до студентов идей и методов функционального анализа, который является языком современной математики, где широко используются понятия функционального пространства (бесконечномерного) и отображения таких пространств.

*Задачи учебной дисциплины:*

- состоят в развитии у студентов двойного зрения: с одной стороны умения следить за внутренней логикой развития теорий функционального анализа, а с другой не упускать из вида обслуживаемую этими теориями проблематику классического и даже прикладного анализа, в частности, вопросов, связанных с интегральными уравнениями Фредгольма и Вольтерры.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:**

Дисциплина относится к обязательной части блока Б1.

Для успешного освоения дисциплины необходимо предварительное изучение курсов «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Математическая логика».

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:**

| Код | Название компетенции | Код(ы) | Индикатор(ы) | Планируемые результаты обучения |
|---|---|---|---|---|
| ОПК-1 | Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности | ОПК-1.1 | Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук | Знать: основные понятия и теоремы функционального анализа<br>Уметь: доказывать теоремы и применять методы функционального анализа для решения задач<br>Владеть: основными приёмами и методами решения задач функционального анализа |
| | | ОПК 1.2 | Умеет использовать базовые знания в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности | Знать: основные понятия разделов дисциплины, методы анализа и доказательств основных утверждений;<br>Уметь: применять аппарат функционального анализа в решении практических задач;<br>Владеть: навыками анализа и исследования конкретных задач. |
| | | ОПК-1.3 | Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний | Знать: основные понятия разделов дисциплины, методы анализа и решения задач<br>Уметь: Находить необходимый научный материал по функциональному анализу для корректного создания математической модели практических задач<br>Владеть: навыками моделирования конкретных задач с помощью средств функционального анализа для последующего их исследования численными методами. |

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. —** 7/252.

**Форма промежуточной аттестации** – зачет, экзамен

## 13. Трудоемкость по видам учебной работы

| Вид учебной работы | | Трудоемкость | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Всего | По семестрам | | | | | |
| | | | 4-й семестр | | 5-й семестр | | 6-й семестр | |
| | | | ч. | ч., в форме ПП | ч. | ч., в форме ПП | ч | ч., в форме ПП |
| Аудиторные занятия | | 136 | 68 | | 18 | | 50 | |
| в том числе: | лекции | 52 | | | 18 | | 34 | |
| | практические | 84 | 68 | | | | 16 | |
| | лабораторные | | | | | | | |
| Самостоятельная работа | | 80 | 40 | | 18 | | 22 | |
| в том числе: курсовая работа (проект) | | | | | | | | |
| Форма промежуточной аттестации<br>*Зачёт, экзамен – 36 часов* | | 36 | | | | | 36 | |
| Итого: | | 252 | 108 | | 36 | | 108 | |

## 13.1. Содержание дисциплины

| № п/п | Наименование раздела дисциплины | Содержание раздела дисциплины | Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК * |
|---|---|---|---|
| | | **1. Лекции** | |
| 1.1 | Измеримые функции и множество $C^+$ | Множества меры нуль. Ступенчатые функции, действия над ними. | https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6911 |
| | | Измеримые функции, действия над ними. Интегрирование ступенчатых функций. Свойства интеграла. Две леммы о последовательностях ступенчатых функций. | |
| | | Множество функций $C^+$, действия над функциями из $C^+$. Конечность почти всюду функций из $C^+$. | |
| | | Интеграл в множестве $C^+$. Простейшие свойства интеграла в $C^+$. Теорема о предельном переходе в $C^+$ под знаком интеграла. Следствие. | |
| | | Критерий интегрируемости по Риману функции $x(t)$ в терминах функций $\underline{x}$ и $\overline{x}$, следствие. Теорема об интегрируемости функции по Риману в терминах последовательностей ступенчатых функций. Функции $x$, $\tilde{x}$ и доказательство равенств почти всюду $x=\underline{x}$, $\tilde{x}=\overline{x}$. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману | |
| 1.2 | Суммируемые функции и интеграл Лебега | Суммируемые функции (определение). Действия над суммируемыми функциями.<br>Интеграл в классе суммируемых функций (определение). Свойства интеграла. Лемма о представлении суммируемой функции. Теорема Беппо Леви, следствия 1 и 2. | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | Теорема о связи несобственного интеграла Римана для неотрицательной функции с интегралом Лебега. Пример функции несобственно интегрируемой по Риману, но не суммируемой. | |
| | | Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (три леммы). Следствия 1 и 2. Теорема Фату. | |
| 1.3 | Мера множества | Определение измеримого множества и его меры. Простейшие свойства измеримых множеств. Теорема об объединении измеримых множеств, следствие для пересечения измеримых множеств. Теорема о мере объединения попарно не пересекающихся измеримых множеств. Теорема о мере объединения расширяющейся последовательности измеримых множеств. Следствие о мере объединения измеримых множеств. Следствие о мере пересечения убывающей последовательности измеримых множеств. | |
| | | Существование неизмеримого множества (множество Лузина). Структура измеримого множества положительной меры. | |
| 1.4 | Теория Лебега | Внешняя мера множества. Теорема о внешней мере измеримого множества. Теорема об измеримости множества в терминах внешней меры. Определение измеримого множества по Лебегу в терминах внешней и внутренней меры. | |
| | | Функции, измеримые по Лебегу. Теорема о множествах функций, измеримых по Лебегу и по Риссу. | |
| | | Определение по Лебегу интеграла от ограниченной измеримой функции. Теорема о совпадении интеграла по Лебегу и интеграла по Риссу от ограниченной измеримой функции. Определение по Лебегу интеграла от неограниченной измеримой функции. Теорема о совпадении множества функций, интегрируемых по Риссу, с множеством функций, интегрируемых по Лебегу. | |
| 1.5 | Интегрирование по измеримому множеству. Обобщения на бесконечный промежуток и функции нескольких переменных | Интегрирование по измеримому множеству. Простейшие свойства. Теорема об интегрировании по объединению измеримых множеств. Теорема о суммируемости неотрицательной функции на объединении измеримых множеств. Оценка интеграла по измеримому множеству. Теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега. | |
| | | Случай бесконечного промежутка. Доказательство измеримости предела измеримых функций. Мера пересечения убывающей последовательности измеримых множеств. | |
| | | Случай функции двух независимых переменных. Теорема Фубини (без док-ва). Теорема о суммируемости по прямоугольнику функции, для которой существует один из повторных интегралов, два следствия. | |
| 1.6 | Пространства суммируемых функций | Пространства $L_p[a,b]$. (определение и линейность для $0 \le p < \infty$). Неравенство Гельдера. Норма для случая $1 \le p < \infty$. | |
| | | Полнота пространства $L_p[a,b]$. Пространство $L_\infty[a,b]$ (определение и норма). | |
| 1.8 | Линейные ограниченные операторы | Линейные операторы и функционалы (определения). Теорема о линейном операторе, непрерывном в одной точке. Ограниченный линейный оператор и теорема о связи ограниченности линейного оператора с его непрерывностью. Теорема об ограниченности линейного оператора, определенного на конечномерном пространстве. | https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=15856 |
| | | Норма линейного ограниченного оператора (определение). Теорема о вычислении нормы оператора. Оператор | |

| | | |
|---|---|---|
| | | Фредгольма в пространстве $C[a,b]$ и его норма. Оператор дифференцирования в $C[a,b]$ и из $C^1[a,b]$ в $C[a,b]$. |
| | | Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов (в смысле равномерной сходимости). Следствие для сопряженного пространства. Произведение линейных операторов. |
| | | Сильная сходимость линейных операторов, связь с равномерной сходимостью. Принцип равномерной ограниченности (лемма и теорема). Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов (в смысле сильной сходимости). |
| | | Теорема о продолжении линейного оператора по непрерывности на все пространство. Обратимый и обратный операторы (определения). Теорема о линейности обратного оператора. |
| 1.9 | Обратимые операторы | Условие обратимости линейного оператора. Условие обратимости линейного оператора и ограниченности обратного. Лемма об обратимости линейного оператора и обратном операторе. Непрерывно обратимый оператор (определение). Следствие о непрерывно обратимом операторе. |
| | | Теорема Банаха о непрерывной обратимости оператора (две леммы и теорема). |
| | | Резольвента линейного оператора и его спектр (определения). Теорема о регулярном множестве и представлении резольвенты, следствие для спектра. Теорема об открытости регулярного множества, следствие для спектра |
| 1.10 | Замкнутые операторы | . Замкнутые операторы (определение). Теорема о замкнутости ограниченного оператора. Замкнутость оператора дифференцирования в $C[a,b]$. |
| | | Теорема о замкнутости оператора, обратного к замкнутому, следствие для непрерывно обратимого оператора. Декартово произведение линейных нормированных пространств (линейные операции, норма и полнота). График линейного оператора. Лемма о графике замкнутого оператора. Теорема о замкнутом операторе, определенном на всем пространстве. |
| 1.11 | Линейные ограниченные функционалы | Продолжение линейного ограниченного функционала – лемма и теорема Хана - Банаха (доказательство для сепарабельного вещественного пространства). Три следствия. Лемма о биортогональных системах. |
| | | Общий вид линейных ограниченных функционалов в пространствах: конечномерном, $l_p\ (1<p<\infty)$, гильбертовом, $L_p[a,b](1<p<\infty)$ (случай $p \neq 2$ без доказательства). |
| | | Второе сопряженное пространство и рефлексивные пространства. Слабая сходимость элементов в нормированных пространствах (определение). Простейшие свойства: единственность слабого предела, связь со сходимостью по норме, ограниченность слабо сходящейся последовательности, оценка для нормы слабого предела. |
| 1.12 | Слабая сходимость элементов | Слабо полные пространства и теорема о слабой полноте рефлексивных пространств. Теорема о слабой сходимости в конечномерном пространстве. Слабо относительно компактные множества (определение). Теорема об ограниченности слабо относительно компактного множества. Теорема о слабой относительной компактности ограниченного множества в рефлексивном пространстве (доказательство для гильбертова пространства). |
| 1.13 | Сопряженные операторы | Сопряженный оператор (определение для ограниченного оператора). Оператор Фредгольма с ядром, суммируемым с |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | квадратом и сопряженный к нему в пространстве $L_2[a,b]$. Теорема о линейности и норме сопряженного оператора. Определение сопряженного оператора в гильбертовом пространстве. | |
| 1.14 | Вполне непрерывные операторы | Вполне непрерывные операторы (определение). Теорема о множестве вполне непрерывных операторов. Теорема о вполне непрерывности оператора, определенного на конечномерном пространстве, или действующего в конечномерное пространство. Теорема о вполне непрерывности оператора, сопряженного к вполне непрерывному. Вполне непрерывные операторы и слабая сходимость (две леммы и теорема). | |
| | | Вполне непрерывность оператора Фредгольма с непрерывным ядром: из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, из $L_2[a,b]$ в $C[a,b]$, из $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$. Вполне непрерывность оператора Фредгольма с ядром, суммируемым с квадратом, из $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$. Теория Рисса – Шаудера линейных уравнений второго рода. Лемма о множестве значений операторов $I-A$ и $I-A^*$. | |
| 1.15 | Линейные уравнения второго рода | Первая, вторая и третья теоремы Фредгольма. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами. | |

| ***2. Практические занятия*** | | | |
|---|---|---|---|
| 2.1 | Метрические пространства | | |
| | | Определение метрического пространства. Примеры. Шары. Ограниченные множества. | https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6061 |
| | | Сходимости в метрических пространствах. Свойства сходящихся последовательностей. Непрерывность метрики по совокупности переменных. Примеры | |
| | | Полнота метрических пространств. Примеры полных пространств. Пример неполного пространства | |
| | | Точки прикосновения и замыкания множеств. Свойствах операции замыкания. Теорема о точки прикосновения множества. Предельной и изолированной точки. | |
| | | Замкнутые множества. Теорема об объединении и пересечении замкнутых множеств | |
| | | Внутренние точки. Операция взятия внутренности множества и ее свойства. Теорема о связи операций замыкания и взятия внутренности множества. | |
| | | Открытые множества. Теорема о связи открытости множества и замкнутости его дополнения. Теорема о свойствах открытых множеств. | |
| | | Построение ограниченных открытых и замкнутых множеств на прямой | |
| | | Теорема о полноте подпространства. Теорема о вложенных шарах. | |
| | | Совершенные, плотные, всюду плотные, нигде не плотные множества. Теорема о пополнении | |
| | | Множества первой и второй категорий. Теорема Бэра. | |
| | | Сепарабельного пространства. Примеры сепарабельных и несепарабельных пространств | |
| | | Непрерывные отображения метрических пространств. Теорема об эквивалентности определений непрерывности через ε, δ и последовательности. Две теоремы о непрерывных функциях и прообразах открытых и замкнутых множеств. | |
| | | Условие Липшица и сжимающие отображения. Принцип сжимающих отображений (с оценкой погрешности). Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. | |
| | | Относительно компактного и компактного множества. Теорема | |

| | | |
|---|---|---|
| | | об ограниченности относительно компактного множества. Теорема Вейерштрасса. |
| | | Вполне ограниченного множества. Теорема об ограниченности вполне ограниченного множества. Теорема Хаусдорфа |
| | | Ограниченные, равностепенно непрерывные, относительно компактные множества в C[a,b] (теорема Арцела). |
| 2.2 | Линейные пространства | Линейное пространство (определение и простейшие свойства). Примеры линейных пространств. |
| | | Выпуклое множество. Линейная зависимость и независимость элементов. Линейное многообразие |
| | | Размерность линейного многообразия. Базис линейного многообразия. Прямая сумма линейных многообразий. |
| 2.3 | Линейные нормированные пространства | Нормированное пространство. Определения и простейшие свойства. Примеры нормированных пространств. |
| | | Ряды элементов нормированного пространства. Сходящиеся и абсолютно сходящиеся ряды. |
| | | Эквивалентные нормы (определение и простейшие свойства). Теорема об эквивалентности норм в любом конечномерном нормированном пространстве. |
| | | Замкнутость конечномерного линейного многообразия. Полнота конечномерного линейного пространства. |
| | | Разрешимость интегральных уравнений Вольтерра второго рода. |
| | | Компактность и конечномерность (лемма Рисса, теорема об относительной компактности всякого ограниченного множества в нормированном пространстве). |
| 2.4 | Пространства со скалярным произведением | Линейное пространство со скалярным произведением (определение). Неравенство Коши - Буняковского, норма, непрерывность скалярного произведения. Определение гильбертова пространства. Примеры пространств со скалярным произведением. |
| | | Свойство ортогональности. Теорема о разложении элемента в сумму проекций. |
| | | Теорема о плотности линейного многообразия в гильбертовом пространстве. |
| | | Ортогональные системы элементов. Теорема об ортогональной системе в сепарабельном пространстве. Процесс ортогонализации Шмидта. |
| | | Задача о наилучшей аппроксимации. Неравенство Бесселя и сходимость ряда Фурье. |
| | | Замкнутая ортонормированная система элементов (определение, сходимость ряда Фурье). Теорема о полной ортонормированной системе элементов. |
| 2.5 | Линейные ограниченные операторы | Решение задач о доказательстве линейности и ограниченности (неограниченности) операторов и функционалов и нахождении их норма. |
| | | Решение задач на определении характера сходимости последовательности линейных ограниченных операторов |
| | | Решение задач на нахождение продолжения линейных ограниченных операторов |
| | | Решение задач о доказательстве линейности и ограниченности (неограниченности) операторов и функционалов и нахождении их нормы |
| 2.6 | Обратимые операторы | Решение задач на нахождение обратных операторов и доказательство их ограниченности (с помощью теоремы Банаха) |
| | | Решение задач на нахождение спектра и резольвенты операторов |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2.7 | Замкнутые операторы | Решение задач на доказательство замкнутости операторов. | |
| 2.8 | Линейные ограниченные функционалы | Решение задач на нахождение продолжения по непрерывности линейных ограниченнх функционалов с помощью теоремы Хана - Банаха. | |
| | | Общий вид линейных ограниченных функционалов в некоторых пространствах. | |
| | | Решение задач на нахождение продолжения по непрерывности линейных ограниченнх функционалов с помощью теоремы Хана - Банаха. | |
| 2.9 | Слабая сходимость элементов | Исследование последовательности линейных ограниченных функционалов на слабую сходимость | |
| 2.10 | Сопряженные операторы | Решение задач на нахождение операторов, сопряжённых к данным. | |
| 2.11 | Вполне непрерывные операторы | Решение задач на доказательство того, что оператор является / не является вполне непрерывным | |
| 2.12 | Линейные уравнения второго рода | Решение линейных уравнений второго рода с применением теории Рисса-Шаудера | |

## 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

| № п/п | Наименование раздела дисциплины | Виды занятий (часов) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Лекции | Лабораторные | Практические | Самостоятельная работа | Всего |
| 1. | Метрические пространства | | | 38 | 20 | 58 |
| 2. | Линейные пространства | | | 4 | 2 | 6 |
| 3. | Нормированные пространства | | | 16 | 10 | 26 |
| 4. | Пространства со скалярным произведением | | | 10 | 8 | 18 |
| 5. | Измеримые функции и множество $C^+$ | 4 | | | 4 | 8 |
| 6. | Суммируемые функции и интеграл Лебега | 3 | | | 2 | 5 |
| 7. | Мера множества | 3 | | | 3 | 6 |
| 8. | Теория Лебега | 3 | | | 4 | 7 |
| 9. | Интегрирование по измеримому множеству. Обобщения на бесконечный промежуток и функции нескольких переменных | 3 | | | 3 | 6 |
| 10 | Пространства суммируемых функций | 3 | | | 4 | 7 |
| 11 | Линейные ограниченные | 5 | | 2 | 5 | 13 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | операторы | | | | | |
| 12 | Обратимые операторы | 5 | | 2 | 2 | 9 |
| 13 | Замкнутые операторы | 2 | | 2 | 2 | 6 |
| 14 | Линейные ограниченные функционалы | 4 | | 2 | 2 | 8 |
| 15 | Слабая сходимость элементов | 4 | | 2 | 2 | 8 |
| 16 | Сопряженные операторы | 5 | | 2 | 4 | 11 |
| 17 | Вполне непрерывные операторы | 4 | | 2 | 2 | 8 |
| 18 | Линейные уравнения второго рода | 4 | | 2 | 1 | 7 |
| | Всего | 52 | 0 | 84 | 80 | 216 |

**14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются задачи по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Функциональный анализ» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекций обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал или материал предыдущего практического занятия. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение обучающимся аудиторных занятий (лекций и практических занятий) и активную работу на них, но и самостоятельную учебную деятельность в семестрах, на которую отводится 80 часов.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Функциональный анализ» предполагает изучение рекомендуемой преподавателем литературы по вопросам лекционных и практических занятий (приведены выше), самостоятельное освоение понятийного аппарата и подготовку к текущим аттестациям (коллоквиумам и выполнению практических заданий) (примеры см. ниже).

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольной работы и практических заданий) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (4 семестр – зачет, 6 семестр – экзамен).

**15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины**

а) основная литература:

| № п/п | Источник |
|---|---|
| *1* | Гуревич, А. П. Сборник задач по функциональному анализу [Электронный ресурс] / Гуревич А. П., Корнев В. В., Хромов А. П. — 2-е, испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2012 .— 192 с. —Книга из коллекции Лань - Математика .— ISBN 978-5-8114-1274-7 .— <URL:http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=3175>. |
| *2* | Власова, Е. А. Элементы функционального анализа [Электронный ресурс] / Власова Е. А., Марчевский И. К. — 1-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2015 .— 400 с. — Книга из коллекции Лань - Математика .— ISBN 978-5-8114-1958-6 .— <URL:http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=67481>. |
| *3* | Смагин, Виктор Васильевич. Функциональные пространства. Вводный курс [Электронный ресурс] : учебное пособие для вузов / В.В. Смагин ; В.В. Смагин ; Воронеж. гос. ун-т .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Воронежский государственный университет, Математический факультет, 2017 .— Свободный доступ из интрасети ВГУ .— Текстовый файл <URL:http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m17-92.pdf>. |

б) дополнительная литература:

| № п/п | Источник |
|---|---|
| *1* | Рисс, Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь ; пер. с фр. Д.А. Василькова под ред. С.В. Фомина; ред. С.А. Теляковский .— Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Мир, 1979 .— 587 с. |
| *2* | Функциональный анализ и интегральные уравнения : Лабораторный практикум : Учебное пособие для студ. мат. специальностей вузов / А.Б. Антоневич, Е.И. Ваткина, М.Х. Мазель и др. ; Под ред. А.Б. Антоновича и Я.В. Радыно .— Минск : БГУ, 2003 .— 178с. |
| *3* | Очан, Юрий Семенович. Сборник задач по математическому анализу. Общая теория множеств и функций : учебное пособие для студ. физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Ю.С. Очан ; под ред. М.Ф. Бокштейна .— М. : Просвещение, 1981 .— 269 с. |
| *4* | Шилов, Георгий Евгеньевич. Математический анализ. Второй специальный курс : учебное пособие для гос. ун-тов / Г.Е. Шилов .— М. : Наука, 1965 .— 327 с. |
| *5* | Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа [Электронный ресурс] / Люстерник Л. А., Соболев В. И. — 2-е изд.,стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2009 .— 272 с. — Книга из коллекции Лань - Математика .— ISBN 978-5-8114-0976-1 .— <URL:http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=245>. |
| *6* | Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа : [учебник] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин ; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова .— Изд. 7-е .— М. : Физматлит, 2006 .— 570 с. |

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)***:**

| № п/п | Ресурс |
|---|---|
| *1* | *Университетская библиотека ONLINE http://biblioclub.ru/* |
| *2* | *Электронная библиотека ЗНБ ВГУ https://lib.vsu.ru/* |

| | |
|---|---|
| 3 | Электронно-библиотечная система "Лань" https://e.lanbook.com/ |

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

| № п/п | Источник |
|---|---|
| 1 | Смагин, В.В. Линейные операторы и функционалы [Электронный ресурс] : учебное пособие для вузов / В.В. Смагин ; В.В. Смагин ; Воронеж. гос. ун-т .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011 .— Свободный доступ из интрасети ВГУ .— Текстовый файл <URL:http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m11-200.pdf>. |
| 2 | Смагин, Виктор Васильевич. Функциональные пространства. Вводный курс [Электронный ресурс] : учебное пособие для вузов / В.В. Смагин ; В.В. Смагин ; Воронеж. гос. ун-т .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Воронежский государственный университет, Математический факультет, 2017 .— Свободный доступ из интрасети ВГУ .— Текстовый файл <URL:http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m17-92.pdf>. |
| 3 | Смагин, Виктор Васильевич. Действительный анализ [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.В. Смагин; Воронеж. гос. ун-т .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015 .— Свободный доступ из интрасети ВГУ .— Текстовый файл .— <URL:http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-29.pdf>. |
| 4 | Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете |

## 17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации учебной дисциплины проводятся различные типы лекций: вводная лекция, лекция-информация, лекция-диалог, лекция с применение современных компьютерных технологий (лекция-презентация), а также практических занятий, на которых осуществляется решение задач и устные опросы по темам занятия.

Дисциплина может реализовываться с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. При проведении занятий в дистанционной форме используются технические и информационные ресурсы Образовательного портала "Электронный университет ВГУ" (https://edu.vsu.ru), базирующегося на системе дистанционного обучения Moodle, развернутой в университете, а также другие доступные ресурсы в сети Интернет.

В части освоения материала лекционных и практических занятий, самостоятельной работы по отдельным разделам дисциплины, прохождения текущей и промежуточной аттестации может применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии, в частности, электронные курсы: https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=15856 , https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6061 на портале «Электронный университет ВГУ».

Самостоятельная работа регламентируется Положением об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете.

## 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Для проведения лекционных и практических занятий используются аудитории, оснащенные специализированной мебелью.

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

| № п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Компетенция(и) | Индикатор(ы) достижения компетенции | Оценочные средства |
|---|---|---|---|---|
| 1. | Разделы 1-4 | ОПК-1 | ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3 | Контрольные работы 1-2 |
| 2. | Разделы 5-18 | ОПК-1 | ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3 | Коллоквиум |
| Промежуточная аттестация форма контроля – зачёт, экзамен | | | | Перечень вопросов к зачёту и экзамену из п.20.2, КИМы для зачёта и экзамена |

## 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: практикоориентированные задания, домашние задания, контрольные работы, коллоквиум

**Описание технологии проведения**

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучаемых и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением контрольных работ и коллоквиума.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками: в четвёртом семестре «зачтено» и «не зачтено», в шестом семестре – «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

В ходе контрольных работ и коллоквиума обучающемуся выдаются КИМы с теоретическими вопросами и задачами. В ходе выполнения заданий нельзя пользоваться никакими справочными материалами, а также электронными носителями и средствами связи, ограничение по времени 90 минут.

В условиях применения электронного обучения и дистанционных образовательных технологий все выполняемые задания текущих аттестаций (контрольная работа) обучающиеся выставляют для проверки в личных кабинетах в электронном курсе на портале «Электронный университет ВГУ». – Moodle:URL:http://www.edu.vsu.ru/.

**Комплект заданий для контрольной работы № 1**

Задание 1. Доказать полноту пространства $s$.

Задание 2. Показать, что в дискретном метрическом пространстве каждое множество открыто.

Задание 3. Доказать компактность всякого конечного множества в метрическом пространстве.
Задание 4. Пусть множества А и В ограничены в Х – метрическое пространство. Показать, что множество $A \cup B$ также ограничено в Х.

**Комплект заданий для контрольной работы № 2**

Задание 1 Доказать, что пересечение любой системы выпуклых множеств есть выпуклое множество.
Задание 2 Показать, что замыкание открытого шара в линейном нормированном пространстве есть соответствующий замкнутый шар.
Задание 3 Показать, что внутренность замкнутого шара в линейном нормированном пространстве есть соответствующий открытый шар.

**Комплект заданий для коллоквиума**

1.Линейные операторы и функционалы (определения).

2.Принцип равномерной ограниченности (лемма и теорема).

3. Доказать, что оператор $A: X \to Y$ является линейным ограниченным, и найти его норму. $A: l_7 \to l_7, Ax = (0,0,\frac{x(1)}{2},\frac{x(2)}{2^2},...,\frac{x(k)}{2^k},...)$

4. Для последовательности операторов $(A_n) \subset LB(X,Y),$ и $A \in LB(X,Y)$ установить: 1) сходится ли $(A_n)$ поточечно (сильно) к оператору *А*; 2) сходится ли $(A_n)$ по норме к оператору *А*. $A_n x = (x(1),...,x(n),0,0,...), A = 1_{l_1}, X = Y = l_1$

Требования к выполнению заданий

Для оценивания результатов обучения на контрольной работе используются следующие показатели:

1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом;

2) умение связывать теорию с практикой;

3) умение применять полученные знания в практическом задании.

**20.2 Промежуточная аттестация**

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: КИМы для зачёта и экзамена

**Перечень вопросов к зачету (семестр 4):**

1. Неравенство Юнга для конечных сумм, неравенство Гельдера для конечных сумм.
2. Неравенство Гельдера для конечных сумм, неравенство Минковского для конечных сумм.
3. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.
4. Определения относительно компактного и компактного множества. Теорема об ограниченности относительно компактного множества. Теорема Вейерштрасса.
5. Свойство ортогональности (определения ортогональных элементов, элемента ортогонального множеству, ортогонального дополнения). Теорема о разложении элемента в сумму проекций.

6. Ортогональная сумма подпространства. Формулировка теоремы о плотности линейного многообразия в гильбертовом пространстве.
7. Условие Липшица и сжимающие отображения (определения). Принцип сжимающих отображений (с оценкой погрешности).
8. Теорема Хаусдорфа.
9. Линейное пространство со скалярным произведением (определение, простейшие свойства).
10. Неравенство Коши-Буняковского, норма, свойство непрерывности скалярного произведения.
11. Определение гильбертова пространства. Примеры пространств со скалярным произведением.
12. Определение сходимости в метрических пространствах. Сходимость в пространствах C[a,b], s.
13. Совершенные, плотные, всюду плотные, нигде не плотные множества (определения). Множества первой и второй категорий (определения и примеры). Теорема Бэра.
14. Линейные пространства (определение ЛП, простейшие свойства, примеры ЛП).
15. Теорема об относительной компактности множества в конечномерном ЛНП.
16. Определения точки прикосновения и замыкания множества. Теорема о свойствах операции замыкания множеств. Теорема о необходимом и достаточном условии для точки прикосновения множества.
17. Две теоремы о непрерывных функциях и прообразах открытых и замкнутых множеств.
18. Определения замкнутого отрезка и выпуклого множества. Линейная зависимость и независимость элементов. Линейное многообразие, линейная оболочка (определения, две леммы).
19. Формулировка теоремы об эквивалентности норм в конечномерном нормированном пространстве.
20. Замкнутость конечномерного линейного многообразия. Полнота конечномерного нормированного пространства.

**Пример КИМ (зачёт)**

1. Ортогональная сумма подпространства. Формулировка теоремы о плотности линейного многообразия в гильбертовом пространстве.
2. Две теоремы о непрерывных функциях и прообразах открытых и замкнутых множеств.
3. Может ли в метрическом пространстве шар радиуса 4 быть строгим подмножеством шара радиуса 3? Ответ обоснуйте.
4. Пусть A и B множества в линейном нормированном пространстве. Доказать, что если множества A и B ограничены, то множество A+B ограничено..

**Перечень вопросов к экзамену (семестр 6):**

1.Линейные операторы и функционалы (определения).
2. Теорема о линейном операторе, непрерывном в одной точке.

3.Ограниченный линейный оператор и теорема о связи ограниченности линейного оператора с его непрерывностью.
4.Теорема об ограниченности линейного оператора, определенного на конечномерном пространстве.
5.Норма линейного ограниченного оператора (определение).
6.Теорема о вычислении нормы оператора.
7.Оператор Фредгольма в пространстве $C[a,b]$ и его норма.
8.Оператор дифференцирования в $C[a,b]$ и из $C^1[a,b]$ в $C[a,b]$.
9.Пространство линейных ограниченных операторов.
10.Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов (в смысле равномерной сходимости). Следствие для сопряженного пространства.
11.Произведение линейных операторов.
12.Сильная сходимость линейных операторов, связь с равномерной сходимостью.
13.Принцип равномерной ограниченности (лемма и теорема).
14. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов (в смысле сильной сходимости).
15.Теорема о продолжении линейного оператора по непрерывности на все пространство. Обратимый и обратный операторы (определения).
16.Теорема о линейности обратного оператора.
17.Условие обратимости линейного оператора. Условие обратимости линейного оператора и ограниченности обратного.
18.Лемма об обратимости линейного оператора и обратном операторе.
19.Непрерывно обратимый оператор (определение). Следствие о непрерывно обратимом операторе.
20.Теорема Банаха о непрерывной обратимости оператора (две леммы и теорема).
21.Резольвента линейного оператора и его спектр (определения).
22.Теорема о регулярном множестве и представлении резольвенты, следствие для спектра.
23.Теорема об открытости регулярного множества, следствие для спектра.
24.Замкнутые операторы (определение). Теорема о замкнутости ограниченного оператора.
25.Замкнутость оператора дифференцирования в $C[a,b]$.
26.Теорема о замкнутости оператора, обратного к замкнутому, следствие для непрерывно обратимого оператора.

27.Декартово произведение линейных нормированных пространств (линейные операции, норма и полнота). График линейного оператора.

28.Лемма о графике замкнутого оператора.

29.Теорема о замкнутом операторе, определенном на всем пространстве.

30.Продолжение линейного ограниченного функционала – лемма и теорема Хана - Банаха (доказательство для сепарабельного вещественного пространства).
31.Три следствия.
32.Лемма о биортогональных системах.
33.Общий вид линейных ограниченных функционалов в пространствах: конечномерном, $l_p\ (1<p<\infty)$, гильбертовом, $L_p[a,b](1<p<\infty)$ (случай $p\neq 2$ без доказательства).
34.Второе сопряженное пространство и рефлексивные пространства.
35.Слабая сходимость элементов в нормированных пространствах (определение). Простейшие свойства: единственность слабого предела, связь со сходимостью по норме, ограниченность слабо сходящейся последовательности, оценка для нормы слабого предела.

36.Слабо полные пространства и теорема о слабой полноте рефлексивных пространств.
37.Теорема о слабой сходимости в конечномерном пространстве. Слабо относительно компактные множества (определение).
38.Теорема об ограниченности слабо относительно компактного множества.
39.Теорема о слабой относительной компактности ограниченного множества в рефлексивном пространстве (доказательство для гильбертова пространства).
40.Сопряженный оператор (определение для ограниченного оператора).
41.Оператор Фредгольма с ядром, суммируемым с квадратом и сопряженный к нему в пространстве $L_2[a,b]$.
42.Теорема о линейности и норме сопряженного оператора.
43.Определение сопряженного оператора в гильбертовом пространстве.
44.Вполне непрерывные операторы (определение). Теорема о множестве вполне непрерывных операторов.
45.Теорема о вполне непрерывности оператора, определенного на конечномерном пространстве, или действующего в конечномерное пространство.
46.Теорема о вполне непрерывности оператора, сопряженного к вполне непрерывному.
47.Вполне непрерывные операторы и слабая сходимость (две леммы и теорема).
48.Вполне непрерывность оператора Фредгольма с непрерывным ядром: из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, из $L_2[a,b]$ в $C[a,b]$, из $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$.

**Пример КИМ (экзамен)**

1. Теорема о линейном операторе, непрерывном в одной точке
2. Оператор дифференцирования в $C[a,b]$ и из $C^1[a,b]$ в $C[a,b]$.
3. Лемма о графике замкнутого оператора
4. Теорема о вполне непрерывности оператора, определенного на конечномерном пространстве, или действующего в конечномерное пространство.
5. Пусть $A: X \to Y$.Доказать, что существует непрерывный обратный оператор $A^{-1}$, и построить его. $A: l_1 \to l_1$, $Ax = ((1-1/2)^2 x_1, (1-1/3)^3 x_2, (1-1/4)^4 x_3, ...)$.
6. Пусть E, F – ЛНП, A – замкнутый линейный оператор из E в F. Доказать, что ядро оператора A N(A) является подпространством пространства E.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования. Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Функциональный анализ» проводится в форме зачета и экзамена.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце четвёртого и шестого семестров.

В ходе проведения зачёта обучающемуся выдается КИМ с двумя теоретическими вопросами и двумя практическими задачами и предлагается написать ответы на вопросы и решить задачу. В ходе выполнения заданий нельзя пользоваться никакими справочными материалами, а также электронными носителями и средствами связи. Ограничение по времени - 90 минут. Студенты, получившие оценки «зачтено» по результатам контрольных работ 1 и 2, получают оценку «зачтено» по дисциплине «функциональный анализ» автоматически.

В ходе проведения экзамена обучающемуся выдается КИМ с четырьмя теоретическими вопросами и двумя практическими задачами и предлагается написать ответы на вопросы и решить задачи. В ходе выполнения заданий нельзя пользоваться никакими справочными материалами, а также электронными носителями и средствами связи. Ограничение по времени - 120 минут. Студенты, сдавшие коллоквиум, в случае согласия с оценкой, освобождаются на экзамене от написания ответов на вопросы 1-2 и решения задачи 5 (КИМ для экзамена) и должны готовить к экзамену только вопросы 21-48 (из списка вопросов к экзамену).

Шкалы и критерии оценивания

| Критерии оценивания | Шкала оценок |
|---|---|
| **Зачёт** | |
| Обучающийся знает основные определения, теоремы. Умеет применять их к практическим заданиям | *Зачтено* |
| Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания (либо их отсутствие) основных понятий, определений и теорем, используемых в курсе | *Не зачтено* |
| **Экзамен** | |
| Обучающийся в полной мере использует фундаментальные знания в области математического анализа, функционального анализа и других дисциплин, способен к определению общих форм и закономерностей отдельной данной предметной области умеет строго доказать утверждения, формулировать результаты, видит следствия полученного результата | *Отлично* |
| Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному из перечисленных показателей | *Хорошо* |
| Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым двум-трём из перечисленных показателей | *Удовлетвори-тельно* |
| Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует четырем из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки. | *Неудовлетвори-тельно* |
| | |

**20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ**

<u>1) закрытые задания (тестовые):</u>

1. Установите соответствие между метрическим пространством и метрикой, заданной на нём.

| | |
|---|---|
| 1 | $C[a,b]$ |
| 2 | $\mathbb{R}_p^n$ |
| 3 | $l_p\ (1 \le p < \infty)$ |
| 4 | $\mathbb{R}_\infty^n$ |

| | |
|---|---|
| а | $\rho(x,y) = \max\limits_{1\le k\le n}\lvert x_k - y_k\rvert$ |
| б | $\rho(x,y) = \max\limits_{a\le t\le b}\lvert x(t) - y(t)\rvert$ |
| в | $\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n}\lvert x_k - y_k\rvert^p\right)^{1/p}$ |
| г | $\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\lvert x_k - y_k\rvert^p\right)^{1/p}$ |

Ответ: 1-б, 2-в, 3-г, 4-а
Решение: задание на знание определения метрик в различных пространствах

2. Установить соответствие между обозначением метрического пространства и его словесным описанием

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\boldsymbol{C[a,b]}$ | | а | пространство n-мерных векторов с вещественными координатами |
| 2 | $\mathbb{R}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{n}}$ | | б | пространство непрерывных на отрезке [a,b] функций |
| 3 | $\boldsymbol{l_p}\ (\boldsymbol{1} \leq \boldsymbol{p} < \infty)$ | | в | пространство n-мерных векторов с комплексными координатами |
| 4 | $\mathbb{C}_{\infty}^{\boldsymbol{n}}$ | | г | пространство числовых последовательностей, суммируемых с p-ой степенью |

Ответ: 1-б, 2-а, 3-г, 4-в

Решение: задание на знание обозначений основных пространств в функциональном анализе

3. Установите соответствие между началом и концом определения.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Множество называется открытым, если | | а | его замыкание совпадает со всем пространством. |
| 2 | Множество называется ограниченным, если | | б | существует замкнутый шар, содержащий это множество. |
| 3 | Множество называется всюду плотным, если | | в | оно совпадает со своим замыканием. |
| 4 | Множество называется замкнутым, если | | г | оно совпадает со своей внутренностью. |

Ответ: 1-г, 2-б, 3-а, 4-в

Решение: вопрос на знание соответствующих определений.

4. Установите соответствие между пространством со скалярным произведением и скалярным произведением, заданным на нём.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\boldsymbol{C_2[a,b]}$ | | а | $(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ |
| 2 | $\mathbb{R}_2^n$ | | б | $(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)dt$ |
| 3 | $l_2$ | | в | $(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k$ |
| 4 | $\mathbb{C}_2^n$ | | г | $(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$ |

Ответ: 1-б, 2-а, 3-г, 4-в

Решение: задание на знание определения скалярного произведения в различных пространствах.

5. Установите соответствие между началом и концом определения.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Множество называется | | а | $\forall(\varepsilon > 0)$ для этого множества существует конечная $\varepsilon$ –сеть. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | относительно компактным, если | | |
| 2 | Множество называется ограниченным, если | б | из каждой последовательности его элементов можно выделить сходящуюся подпоследовательность. |
| 3 | Множество называется компактным, если | в | существует замкнутый шар, содержащий это множество. |
| 4 | Множество называется вполне ограниченным, если | г | оно относительно компактно и замкнуто. |

Ответ: 1-б, 2-в, 3-г, 4-а.
Решение: вопрос на знание соответствующих определений.

<u>2) открытые задания:</u>

1. Как называется нормированное пространство, полное в смысле сходимости по норме?
Ответ: банахово пространство (банахово)
Решение: здесь приведено определение банахова пространства

2. Как называется пространство со скалярным произведением, полное по норме, порождённой скалярным произведением?
Ответ: гильбертово пространство (гильбертово)
Решение: здесь приведено определение гильбертова пространства

3. Вставьте одно слово: «Множество, которое содержит все свои точки прикосновения, называется _________ ».
Ответ: замкнутым (замкнутое)
Решение: здесь приведено определение замкнутого множества

4. Вставьте одно пропущенное слово: «Множество, каждая точка которого является ________, называется открытым».
Ответ: внутренней
Решение: здесь приведено определение открытого множества

5. Вставьте 3 пропущенных слова: «Метрическое пространство называется сепарабельным, если в нём существует ________ ________ ________ множество».
Ответ: счётное всюду плотное (всюду плотное счётное)
или, если не использовать «ё»: счетное всюду плотное, всюду плотное счетное
Решение: здесь приведено определение сепарабельного пространства

**Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:**

<u>1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):</u>

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

<u>2) Задания закрытого типа (множественный выбор):</u>

- 2 балла – указаны все верные ответы;

- 0 баллов — указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

**Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).**